Ирена Стојковска

1. Линеарно програмирање: Вовед. Системи од линеарни неравенства

А. Да претпоставиме дека треба да направиме мешавина од леблебија и суво грозје, но не сме сигурни за нивниот сооднос. Тоа што ни е познато се калориите и составот на ханливите состојки како јаглени хидрати и протеини кај секој од овие производи. Сакаме да го одредиме соодносот на леблебијата и сувото грозје така да ги минимизираме калориите или пак да ги максимизираме хранливите состојки на мешавината од леблебија и суво грозје.

Б. Една фабрика за играчки произведува два типа на играчки камиони. Познати се ресурсите со кои располага, како и пазарните цени на играчките. Фабриката треба да направи план на производството така да биде изложена на што е помалку тошок, односно да оствари што е можно поголема заработка.

В. Пензиониран брачен пар има одредена сума на пари која сака да ја инвестира. При познати услови на висина на инвестиците во одредени обрзници и позната повратна заработка од истите, нивниот брокер треба да одлучи како да го посоветува брачниот пар да инвестира, за да повратната заработка е што е можно повисока.

Ова се неколку од многуте случаи кога е потребно да се донесат **одлуки** (во кој сооднос да се направи мешавината од леблебија и суво грозје, или по колку парчиња од секоја играчка камион да произведе фабриката за играчки, или која сума на инвестиции да се инвестира во обврзниците), под одредени **ограничувања** (познати се количините, калориите и хранливите состојки на леблебијата и сувото грозје соодветно, односно познати се ресурсите за прозводство на играчките и нивните пазарни цени, односно познати се висините на инвестиците во одредени обрзници и позната повратна заработка од истите), за да се **оптимизира** (минимизира или максимизира) одредена измерлива количина (да се минимизираат калориите, максимизираат хранливите состојки на направената мешавина од различни производи, или да се минимизира трошокот при производството, максимизира профитот при продажбата, или да се максимизира повратната заработка при инвестирањето).

Доколку измерливата количина што треба да се оптимизира е некој линеарен израз, а променливите од тој израз се подложени на огранчувања кои може да се запишат преку систем од линеарни неравенства, решението на една таква задача на оптимизација може да се добие со помош на методи, постапки, техники на **линеарно програмирање**, а задачата се нарекува **задача на линеарно програмирање**.

Историски, задачите на линеарно програмирање потекнуваат од времето на Втората Светска Војна, кога за потребите на војската требало да се донесат одлуки во врска со распределување, искористување на ресурсите. Меѓу оние кои работеле на решавање на таквиот вид на проблеми бил Џорџ Данциг (George Dantzig) кој подоцна ја дал и општата формулација на задачата на линеарно програмирање и предложил метод за нејзино решавање, познат како симплекс метод.

Со цел да се резбере подобро поимот за задача на линерно програмирање како и да се усвои метод за нејзино решавање, овде ќе се задржиме на задачи со две променливи. Тоа значи дека ограничувањата се запишани преку **систем од линеарни неравенства** кои може да се претставaт графички на координатен систем во рамнина, па следствено ќе биде изложен **геометриски пристап** во решавањето на задачата на линеарно програмирање со две променливи. Иако ќе работиме со еден од наједноставните облици на задача на линеарно програмирање, значителна е нивната **примена**, како што беше изложено на почетокот, примена во производството, инвестициите, понатаму примена во транспотрот, финансиите, прехраната.

На почетокот ќе се осврнеме на графичко прикажување на систем од линеарни неравенства, но чекор по чекор. Најнапред, графичко прикажување на линеарно неравенство.

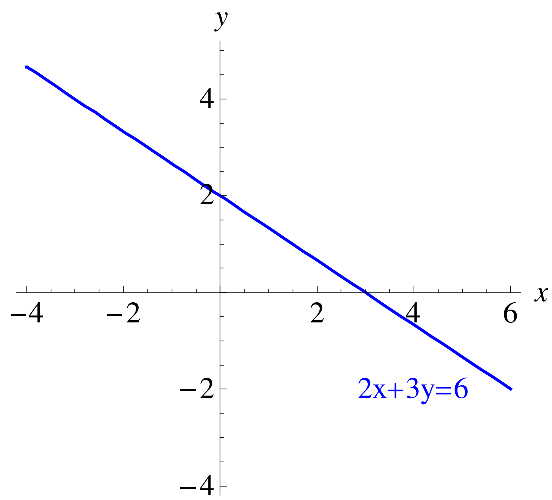
Граф на линеарно неравенство од две променливи x и y е множеството од сите точки (x, y) за кои е исполнето неравенството.

Пример 1. Точката $(1,4)$ припаѓа на графот на линеарното неравенство $2x+3y \geq 6$, затоа што $2 \cdot 1+3 \cdot 4=2+12=14 \geq 6$. Но, затоа пак точката $(-1,1)$ не припаѓа на графот на линеарното неравенство $2x+3y \geq 6$, затоа што $2 \cdot (-1)+3 \cdot 1=-2+3=1<6$.

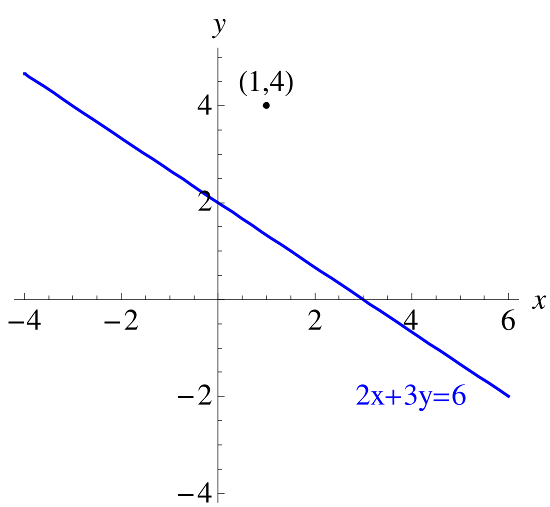
Природно е да се прашаме, дали постојат други и колку такви точки постојат, покрај точката $(1,4)$, за кои е исполнето неравенството $2x+3y \geq 6$? Па, наша задача ќе биде да ги прикажеме графички сите точки од графот на линеарното неравенство.

Постапка за графичко прикажување на линеарно неравенство.
Чекор 1. Нацртај ја соодветната права p која одговара на линеарната равенка која соодветсвува на линеарното неравенство (која се добива кога знакот за неравенство $<,>,\leq,\geq$ ќе се замени со знак за равенство $=$). Доколку неравенството е строго ($<$ или $>$), тогаш правата p нацртај ја со испрекината линија што значи дека точките од правата p не припаѓаат на графот на нелинеарното неравенство.
Чекор 2. Одбери точка P за тестирање која не припаѓа на правата p.
Чекор 3. Ако коодинатите на точката P го задоволуваат неравенството, тогаш секоја точка од рамнината која се наоѓа на иста страна од правата p каде е и точката P е точка од графот на линеарното неравенство и обој ја таа страна од правата p. Ако коодинатите на точката P не го задоволуваат неравенството, тогаш секоја точка од рамнината која се наоѓа на страната од правата p каде не е точката P е точка од графот на линеарното неравенство и обој ја таа страна од правата p.

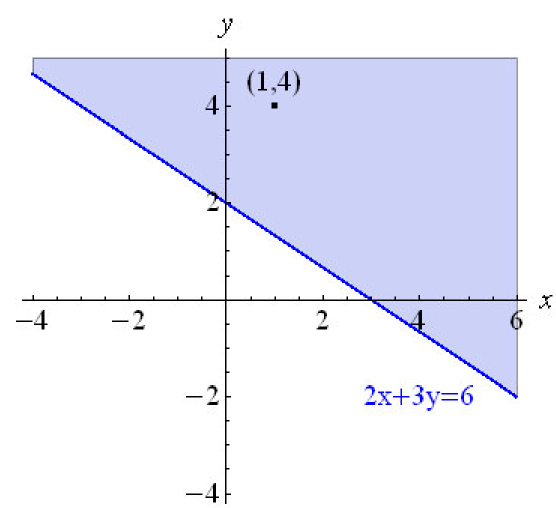
Пример 1. (продолжува) Графот на линеарната неравенка $2x+3y \geq 6$ е множеството од точки $\{(x,y) \mid 2x+3y \geq 6\}$. Според постапката за негово графичко прикажување, најнапред ја цртаме правата $2x+3y=6$ (Слика 1а), потоа избиране една точка од рамнината која не припаѓа на правата, нека е тоа точката $(1,4)$ (Слика 1б), и бидејќи погоре беше покажано дека оваа точка припаѓа на графот (затоа што $2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = 14 \geq 6$), тоа значи дека сите точки од рамнината кои се наоѓаат од иста страна на правата $2x+3y=6$ како и точката $(1,4)$, се точки од бараниот граф, па таа страна од рамнината ја боиме (Слика 1в). Да напоменеме дека заради етапно изложување на постапката за графичко прикажување на нелинеарно неравенство тука се дадени три цртежа, но доволен е само еден, последниот цртеж, како што е прикажано во следните примери.



Слика 1а.

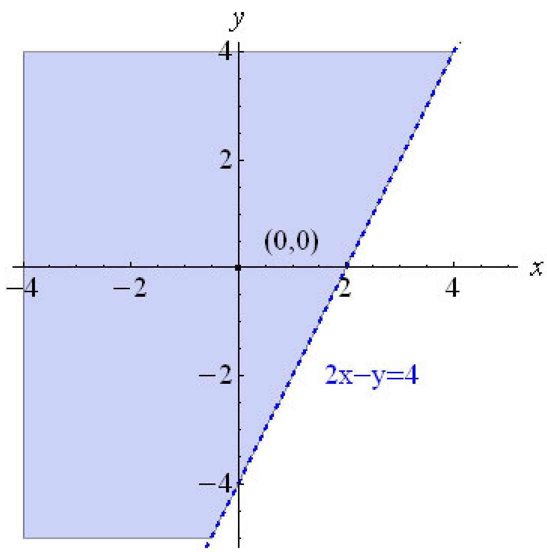


Слика 1б.

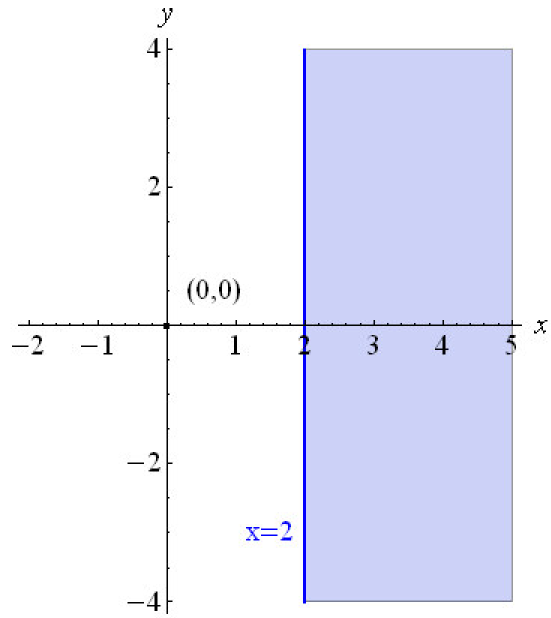


Слика 1в.

Пример 2. За да го нацртаме графот на линеарната неравенка $2x-y<4$, најнапред ја цртаме правата $2x-y=4$ со испрекината линија заради знакот за строго неравенство, потоа избираме една точка од рамнината која не припаѓа на правата, на пример точката $(0,0)$ што во принцип е најпогодна за проверка, и бидејќи $2 \cdot 0 - 0 = 0 < 4$, односно точката $(0,0)$ го задоволува неравенството $2x-y<4$, тоа значи дека сите точки од истата страна на рамнината поделена со правата $2x - y = 4$ каде се наоѓа и точката $(0,0)$ го формираат бараниот граф (Слика 2).



Слика 2.



Слика 3.

Пример 3. Графот на линеарната неравенка $x \geq 2$ го цртаме така да прво ја цртаме правата $x = 2$, тоа е права паралелна со y-оската која минува низ точката $(2,0)$ на x-оската, потоа ја земаме точката $(0,0)$ за тестирање и бидејќи $0 < 2$, односно точката $(0,0)$ не го задоволува неравенството $x \geq 2$, заклучуваме дека сите точки од рамнината кои се наоѓаат во оној дел од рамнината поделен со правата $x = 2$ каде не е точката $(0,0)$ го формираат бараниот граф (Слика 3).

Задача 1. Нацртај го графот на секоја од следните неравенки:
а) $5x + y \geq 10$ б) $x + 5y < 5$ в) $2x \leq y$ г) $x \geq 0$ д) $y \geq 0$

Сега може да преминеме на графичко прикажување на граф на систем од линеарни неравенства што претставува збир од две или повеќе неравенки.

Граф на систем од линеарни неравенства од две променливи x и y е множеството од сите точки (x, y) за кои е исполнето секое од неравенствата во системот.

Интересно е да се забележи дека може да се случи да не постои точка од рамнината која го задоволува секое од неравенството во системот. Во тој случај графот е празно множество $\varnothing$, како што е прикажано со еден од следните примери.

Пример 4. Нека е даден следниот систем од линеарни неравенки

$$\begin{cases} 2x + y \leq 6 \\ x - y \geq 3 \end{cases}.$$

За точката $(6,1)$ имаме дека $2\cdot 6+1=12+1=13>6$ и $6-1=5\geq 3$, што значи дека таа не го задоволува првото неравенство, но го задоволува второто. Заклучуваме дека $(6,1)$ не е точка од графот на системот.

За точката $(3,4)$ имаме дека $2\cdot 3+4=6+4=10>6$ и $3-4=-1<3$, што значи дека таа не го задоволува ниедно од неравенствата. Заклучуваме дека $(3,4)$ не е точка од графот на системот.

За точката $(1,2)$ имаме дека $2\cdot 1+2=2+2=4\leq 6$ и $1-2=-1<3$, што значи дека таа го задоволува првото неравенство, но не го задоволува второто. Заклучуваме дека $(1,2)$ не е точка од графот на системот.

За точката $(2,-3)$ имаме дека $2\cdot 2+(-3)=4-3=1\leq 6$ и $2-(-3)=5\geq 3$, што значи дека таа ги задоволува и двете неравенства. Заклучуваме дека $(2,-3)$ е точка од графот на системот.

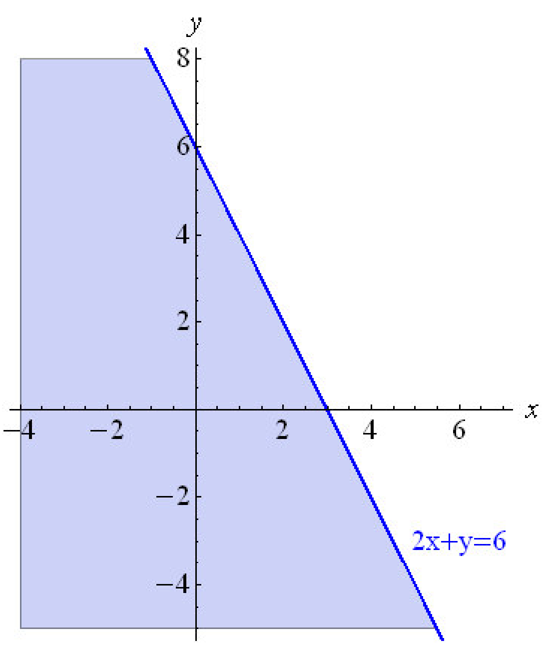
Повторно природно се наметнува прашањето како да ги најдеме сите точки кои припаѓаат на графот од системот од Пример 4, како да ги прикажеме графички? Ако графот на систем од линеарни неравенства го интерпретираме како пресек на графовите на секое од неравенствата, тогаш знаејќи ја постапката за графичко прикажување на линеарно неравнство, графичкиот приказ на системот е оној дел од рамнината каде се преколопуваат боите кои одговараат на секое од неравенствата од системот.

Пример 4. (продолжува) За графот на системот

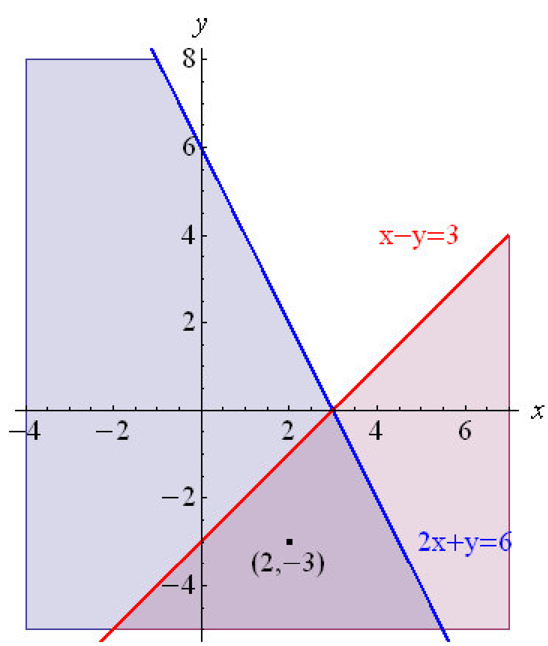
$$\begin{cases} 2x+y\leq 6 \\ x-y\geq 3 \end{cases}$$

важи следното равенство

$$\{(x,y)\mid 2x+y\leq 6 \text{ и } x-y\geq 3\}=\{(x,y)\mid 2x+y\leq 6\}\cap\{(x,y)\mid x-y\geq 3\}.$$



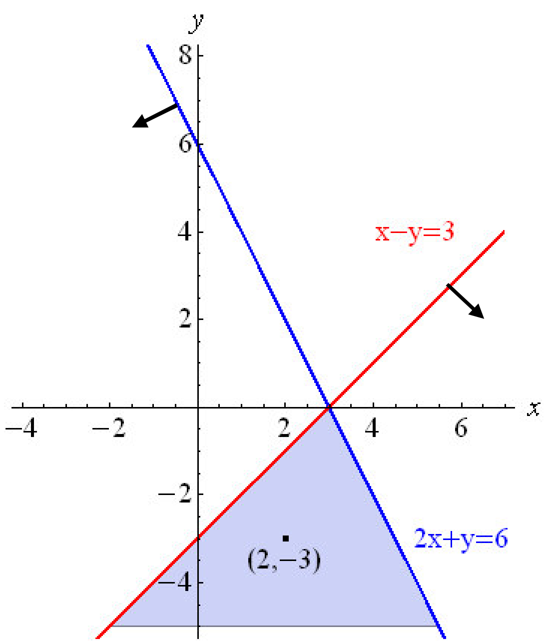
Слика 4а.



Слика 4б.

Затоа, прво го прикажуваме графички неравенството $2x+y\le 6$ (Слика 4а), потоа и неравенството $x-y\ge 3$ (Слика 4б) од каде го согледуваме пресекот на двата графа и го прикажуваме само делот од рамнината кој припаѓа на графот на системот (Слика 4в).

Забележуваме дека во овој пример, со помош на правите $2x+y=6$ и $x-y=3$ рамнината е поделена на четири дела, и графичкиот приказ на графот на системот е оној од четирите дела каде се наоѓа точката $(2,-3)$, за која претходно покажавме дека припаѓа на графот на системот (бидејќи нејзините координати ги исполнуваат и двете неравенства, т.е. $2\cdot 2+(-3)=4-3=1\le 6$ и $2-(-3)=5\ge 3$), Слика 4б. Па, друг начин за графички приказ на системот е со поверка на по една точка од секој дел од рамнината поделена со правите кои содветсвуваат на неравенствата и боење на оној дел од рамнината каде се наоѓа точката која припаѓа на графот. Но, овој начин може да биде доста неефикасен, затоа што веќе за систем од три линеарни неравенки може да се случи да треба да се направат проверки за седум точки, а за систем од четири линеарни неравенки може да се случи да треба да се направат проверки за девет точки.



Слика 4в.

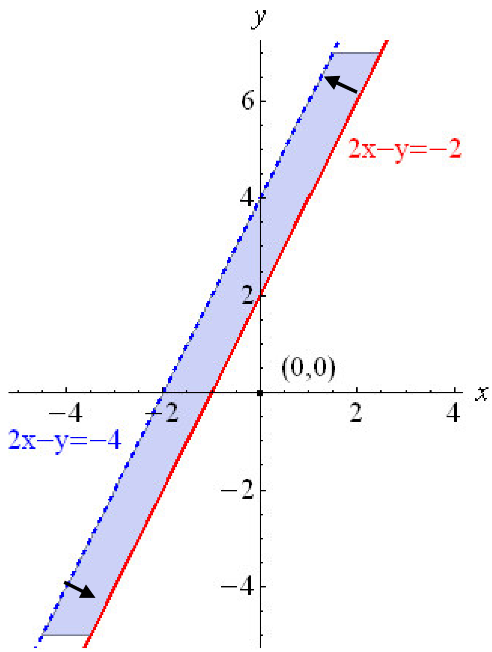
Затоа, предлагаме начин малку поинаков од боењето на делот од рамнината на секоја од неравенките од системот или правењето проверка на по една точка од секој од деловите од рамнината формирани со правите кои одговараат на неравенките дали припаѓа на графот на системот. Новиот начин подразбира означување со насочени стрелки кон деловите од рамнината кои би требале да се обојат за секоја од неравенките од системот, и крајниот резултат е оној дел од рамнината формиран со правите кои одговараат на неравенките, кон кој се насочени секоја од стрелките (Слика 4в).

Пример 5. При цртање на графот на системот од линеарни неравенки

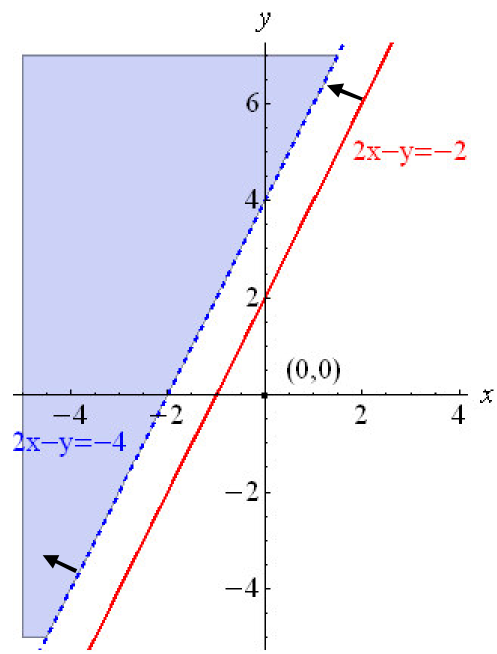
$$\begin{cases} 2x-y>-4 \\ 2x-y\le -2 \end{cases}.$$

најнапред ја цртаме правата $2x-y=-4$ со испрекината линија (заради знакот на строго неравенство), проверуваме дали точката $(0,0)$ припаѓа на графот на неравенката $2x-y>-4$, и бидејќи $2\cdot 0-0=0>-4$, односно припаѓа, ја поставуване насочената стрелка кон тој дел од рамнината каде се наоѓа точката $(0,0)$. Истото го правиме и за второто неравенство. Ја цртаме правата

$2x-y=-2$, проверуваме дали точката $(0,0)$ припаѓа на графот на неравенката $2x-y\le -2$, и бидејќи $2\cdot 0-0=0>-2$, односно не припаѓа, ја поставуваме насочената стрелка кон другиот дел од рамнината. Делот од рамнината кон кој се насочени и двете стрелки одговара на графот на системот (Слика 5).



Слика 5.



Слика 6.

Пример 6. Со измена на знакот на неравенство во првата неравенка од Пример 5, го добиваме следниот систем од линеарни неравенки

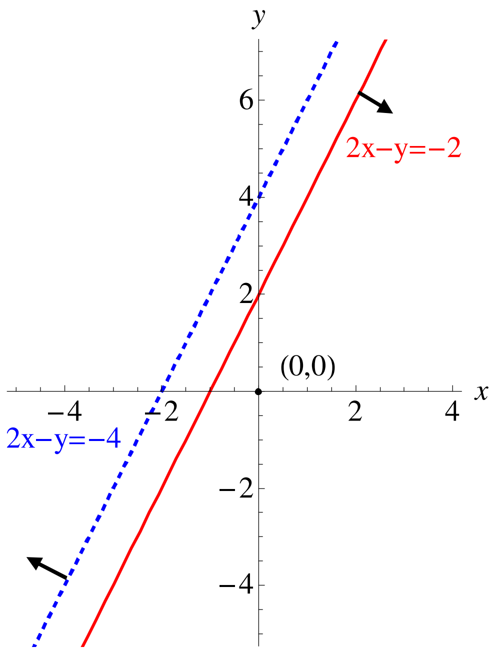
$$\begin{cases} 2x-y<-4 \\ 2x-y\le -2 \end{cases}.$$

Цртањето на графот на овој систем е слично како при Пример 5, правите кои одговараат на неравенките се истите, различно е само насочувањето на стрелките. Односно, по проверката $2\cdot 0-0=0\ge -4$ и $2\cdot 0-0=0>-2$ заклучуваме дека точката $(0,0)$ не припаѓа на ниеден од графовите на неравенките, што значи дека стрелките ги насочуваме кон оние делови од рамнината каде не се наоѓа точката $(0,0)$. Како резултат на тоа го добиваме графичкиот приказ на графот како дел од рамнината кон кој се насочени двете стрелки, што во овој случај се поклопува со графот на првата неравенка (Слика 6), имено ако за една точка (x,y) е исполнето неравенството $2x-y<-4$, тогаш ќе биде исполнето и неравенството $2x-y\le -2$.

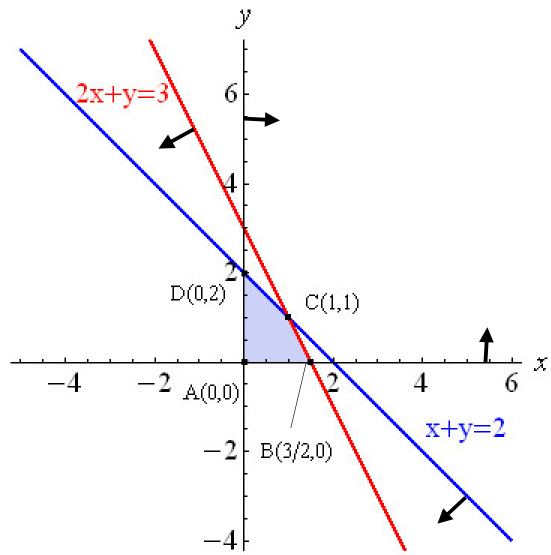
Пример 7. Доколку и кај двете неравенки од системот од Пример 5 им се поставаат обратни знаци за неравенство се добива следниот систем од линеарни неравенки

$$\begin{cases} 2x-y<-4 \\ 2x-y\ge -2 \end{cases}.$$

По цртањето на правите кои одговараат на линарните неравенки, насочените стрелки ги поставуваме обратно од истите кај Пример 5. Согледуваме дека не постои точка од рамнината кон која се истовемено насочени и двете стрелки, па затоа графот на овој систем е празно множество (Слика 7).



Слика 7.



Слика 8.

Пример 8. Цртањето на граф на систем од повеќе од две линеарни неравенки се прави на сосема ист начин, цртање на правите кои одговараат на неравенките, поставување на насочените стрелки и соглдедување на делот од рамнината кон кој се насочени сите стрелки. Да го илустрираме ова на следниот систем од четири линеарни неравенки

$$\begin{cases} x+y\le 2 \\ 2x+y\le 3 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}.$$

По цртање на правата $x+y=2$, проверуваме дали точката $(0,0)$ припаѓа на графот на неравенката $x+y\le 2$, односно од $0+0=0\le 2$ заклучуваме дека припаѓа, па стрелката ја насочуваме кон делот од рамнината каде се наоѓа таа. Потоа ја цртаме правата $2x+y=3$ и проверуваме повторно за $(0,0)$, и бидејќи $2\cdot 0+0=0\le 3$ заклучуваме дека $(0,0)$ припаѓа на графот на неравенката $2x+y\le 3$ и насочената стрелка ја поставуваме кон делот од рамнината каде се наоѓа точката $(0,0)$. Правите $x=0$ и $y=0$ се соодветно y-оската и x-оската. Делот од рамнината кој одговара на неравенката $x\ge 0$ е десно од y-оската, додека делот од рамнината кој одговата на неравенката $y\ge 0$ е над x-оската. Па, делот од рамнината кон кој се насочени сите стрелки е заграден со отсечките AB, BC, CD, DA, каде $A(0,0)$, $B(\frac{3}{2},0)$, $C(1,1)$, $D(0,2)$, Слика 8. Да забележиме дека точките A, B, C, D се пресечни точки на правите кои одговараат на неравенствата и аналитички се добиваат при решавање на систем од две линеарни равенки. Овие точки се нарекуваат **темиња** на областа определена со системот линеарни неравенки.

Задача 2. Нацртај го графот на секој од системите од линеарни неравенки:

а) $\begin{cases} 6x-5y \le 5 \\ 2x+4y \ge 10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-5y \ge 0 \\ x+3y \ge 15 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x+2y \ge 6 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y \ge 2 \\ 2x+3y \le 6 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Како што беше спомнато на почетокот, задачата на линеарно програмирање има ограничувања кои може да се запишат како систем од линеарни неравенки. Пред да преминеме на решавање, а пред се на формулирање на задача на линеарно програмирање, ќе се задржиме на формирање на системот ограничувачки неравенства за даден проблем.

Пример 9. Располагаме со 1200 грама леблебија и 1920 грама суво грозје. Овие два производа треба да се измешаат во пакувања од по 16 грама, така да ниско калоричното пакување содржи 4 грама леблебија и 12 грама суво грозје, додека високо калоричното пакување содржи 8 грама леблебија и 8 грама суво грозје. Како изгледа системот ограничувачки неравенства за овој проблем?

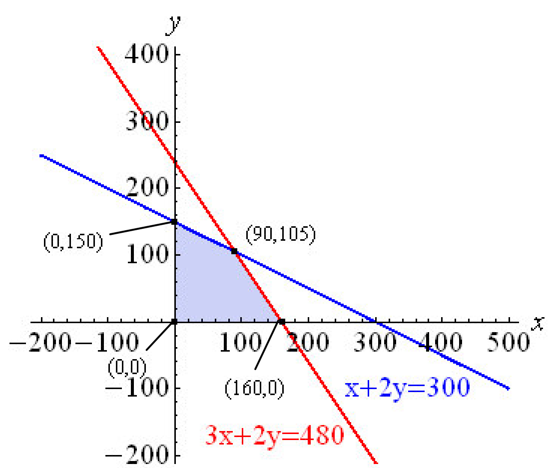
Најнапред ги дефинираме променливите. Бидејќи проблемот е во начинот на пакување на леблебијата и сувото грозје, природно се наметнуваат променилвите

x - број на ниско калорични пакувања,

y - број на високо калорични пакувања.

Првите ограничувања се однесуваат на ненегативноста на бројот на пакувања, па така имаме

$$x \ge 0 \quad \text{и} \quad y \ge 0.$$



Слика 9.

За ниско калоричните пакувања би се потрошиле $4 \cdot x$ грама леблебија, а за високо калоричните пакувања би се потрошиле $8 \cdot y$ грама леблебија. И бидејќи располагаме со 1200 грама леблебија, тоа значи не можеме да потрошиме повеќе од тоа при формирањето на пакувањата. Така го добиваме ограничувањето

$$4x + 8y \le 1200.$$

Расудувајќи на сличен начин за сувото грозје, се добива ограничувањето

$$12x + 8y \le 1920.$$

Значи, системот од ограничувачки линеарни неравенки е следниот

$$\begin{cases} 4x + 8y \le 1200 \\ 12x + 8y \le 1920 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y \le 300 \\ 3x + 2y \le 480 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}.$$

Графот на овој систем е прикажан на Слика 9, при што негови темиња се точките $(0,0)$, $(160,0)$, $(90,105)$ и $(0,150)$.

Задача 3. Формирај го и илустрирај го системот ограничувачки неравенства за следниот проблем: Еден фармер треба да направи мешавина од два типа на зрнеста храна за прехрана на секое од животните. Секоја единица од прввиот тип зрнеста храна содржи 1 единица протеини и 5 единици железо, додека секоја единица од вротиот тип зрнеста храна содржи 2 единици протеини и 1 единица железо. Секое од животните треба да прими најмалку 5 единици протеини и 16 единици железо секој ден.

Следниот пат ќе биде искористено графичкото претставување на систем од линеарни неравенки за геометриски пристап кон решавање на задача на линеарно програмирање.

Литература.

[1] G. B. Dantzig, *Linear programming and extensions*, A report prepared for US Air Force Project RAND, August 1963, Santa Monica, California, USA

[2] M. Sullivan, A. Mizrahi, *Mathematics: An Applied Approach*, Eight Edition, Chicago State University, Indiana University, 2005