Ирена Стојковска

3. Линеарно програмирање: Примени

Задачите на линеарно програмирање наоѓаат примена во многу области како производството, инвестициите, транспортот, финансиите, прехраната и слично. Во понатамошниот текст ќе бидат изложени некои од примените.

Пример 14. Производство - Максимизаирање на заработката. Една фабрика за играчки произведува два модела на камиончиња - стандарден и луксузен. За производството на секое парче од стандардниот модел потребни се 2 часа за изработка на деловите и 2 часа за нивно составување, додека за производство на секое парче од луксузниот модел потребни се 2 часа за изработка на деловите и 4 часа за нивно составување. Фабриката поседува две машини за изработка на деловите и три машини за составување и секоја од овие машини работи најмногу по 40 часа неделно. На секое парче од стандардниот модел фабрката заработува по 30 ден., додека на секое парче од луксузниот модел заработува по 40 ден. Под претпоставка дека секое произведено камионче ќе биде продадено, по колку парчиња од секој модел треба да се произведат за да се максимизира заработката?

Решение.

Често при решавање на реалните проблеми на линеарно програмирање, најнапред дадените податоци во задачата се внесуваат во **табела на проблемот**. Така, ја составуваме следната табела на проблемот.

	изработка	составување	заработка
стандарден модел	2 часа	2 часа	30 ден.
луксузен модел	2 часа	4 часа	40 ден.
вкупно (максимум часови неделно)	$2 \cdot 40$ часа	$3 \cdot 40$ часа	

Во горната табела дадени се бројот на часови потребни за изработка и составување на деловите за секое парче од стандардниот и луксузниот модел соодветно, како и заработката по парче за секој од моделите. Последната редица (вкупно) е пополнета според податокот дека фабриката поседува 2 машини за изработка на деловите и 3 машини за составување и секоја од овие машини работи најмногу по 40 часа неделно.

Следно е дефинирање на **одлучувачките променливи**. Во овој проблем тоа се x - бројот на парчиња од стандардниот модел кои треба да се произведат за една недела, и y - бројот на парчиња од луксузниот модел кои треба да се произведат за една недела.

Тогаш, заработката за една недела е $Z = 30x + 40y$ денари и ја претставува **функцијата на целта** за проблемот која треба да се максимизира.

Табелата на проблемот помага при одредување на **ограничувањата** за проблемот. Знаеме дека за производство на едно парче од стандардниот модел потребни се 2 часа за изработка на деловите, и за производство на едно парче од луксузниот модел потребни се 2 часа за изработка на деловите. Тогаш, вкупниот број на часови неделно за изработка на делови за x парчиња од стандардниот модел и y парчиња од луксузниот модел е $2x + 2y$. Бидејќи, фабриката може да "обезбеди" најмногу $2\cdot 40=80$ часа неделно за изработка на делови, го добиваме првото ограничување $2x+2y\leq 80$. Второто ограничување го формираме на сличен начин, имено тоа се однесува на бројот на неделни часови за составување на деловите, односно $2x+4y\leq 120$. Овие ограничувања и огранучувањата за ненегативност на променливите $x\geq 0$ и $y\geq 0$ (бројот на произведени парчиња неделно) го формираат **системот од ограничувања**

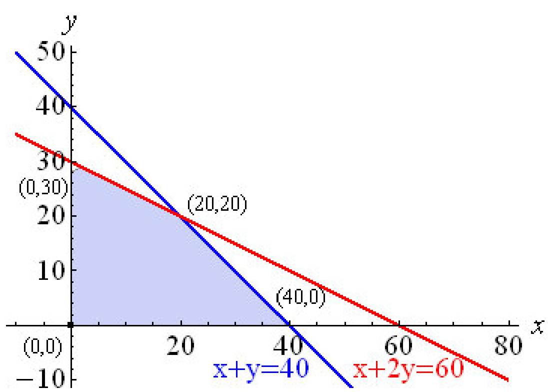
$$\begin{cases} 2x+2y\leq 80 \\ 2x+4y\leq 120 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\leq 40 \\ x+2y\leq 60 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

па соодветната **задача на линеарно програмирање** е

$$\max Z := 30x+40y$$

$$\begin{cases} x+y\leq 40 \\ x+2y\leq 60 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Претходно беше изложен **геометрискиот пристап** за решавање на задачата на линеарно програмирање. Да се потсетиме. Тој подразбираше најнапред претставување на допустливата област на координатен систем, односно графички приказ на ограничувачките неравенства. Потоа, одредување на вредноста на функцијата на целта во секое од темињата од допустливата област. И доколку допустливата област е заградена со отсечки, тогаш може да кажеме дека функцијата на целта ги достигнува својот максимум и минумум во некое од нејзините темиња. На Слика 14 е прикажана допустливата област од каде се согледува дека нејзини темиња се точките $(0,0)$, $(40,0)$, $(20,20)$ и $(0,30)$.



Слика 14

Потоа, од табелата во која е пресметана функцијата на целта во секое од темињата се согледува дека функцијата на целта го достигнува својот максимум во точката $(20,20)$.

теме (x,y)	вредност на функцијата на целта $z=30x+40y$	
$(0,0)$	$z=30\cdot 0+40\cdot 0=0$	
$(40,0)$	$z=30\cdot 40+40\cdot 0=1200$	
$(20,20)$	$z=30\cdot 20+40\cdot 20=600+800=1400$	max
$(0,30)$	$z=30\cdot 0+40\cdot 30=1200$	

Тоа значи дека, фабриката ќе оствари максимална заработка од 1400 ден. неделно, ако произведе 20 парчиња од стандардниот модел камиончиња и 20 парчиња од луксузниот модел камиончиња.

Пример 15. Инвестиции - Финансиско планирање. Пензиониран брачен пар има 30000 ден. кои планира да ги инвестира во обврзници со фиксна повратна заработка. Нивниот брокер ги советува да инвестираат во два типа на обврзници, тип А од кој би добиле повратна заработка од 8% и тип В од кој би добиле повратна заработка од 12%. Откако го разгледале предлогот, брачниот пар одлучил да инвестира најмногу 12000 ден. во обврзниците од тип А, и најмалку 6000 ден. во обврзниците од тип В. Тие исто така планираат да инвестициите во обврзниците од тип В да се поголеми или еднакви на инвестивиите во обврзниците од тип А. Која одлука треба да ја донесат при инвестирањето за да реализираат најголема заработка?

Решение.

Табелата на дадениот проблем на инвестиции е следната.

	инвестиции	повратна заработка
обврзници тип А	најмногу 12000 ден.	8 %
обврзници тип В	најмалку 6000 ден.	12 %
вкупно	најмногу 30000 ден.	
ивестициите во обврзниците од тип В се поголеми или еднакви на инвестициите во обврзниците од тип А		

Одлучувачките променливи за овој проблем се x - инвестирани денари во обврзниците од тип А, и y - инвестирани денари во обврзниците од тип В.

Брачниот пар сака при инвестирањето да оствари највисока повратна заработка и затоа функцијата на целта која треба да се максимизира е $Z = 0.08x + 0.12y$. Имено, повратната заработка од инвестираните x денари во обврзниците од тип А е $8\% = 0.08$ од x, односно $0.08x$, и соодветно повратната заработка од инвестираните y денари во обврзниците од тип В е $12\% = 0.12$ од y, односно $0.12y$. Затоа вкупната повратна заработка е $0.08x + 0.12y$.

Ограничувањата на проблемот се формираат со помош на табелата на проблемот. Од тоа што инвестициите во обврзниците од тип А се најмногу 12000 денари го добиваме првото ограничување $x \le 12000$, додека пак од тоа што инвестициите во обврзниците од тип В се најмалку 6000 денари го добиваме второто ограничување $y \ge 6000$. Брачниот пар располага со 30000 денари за инвестирање, па затоа третото ограничување е $x + y \le 30000$. Тие исто така сакаат да инвестираат повеќе во обрзниците од тип В, отколку во обврзниците од тип А, па затоа четвртото ограничување е $y \ge x$. И секако, треба да ги додадеме и ограничувањата за ненегативност на променливите, односно $x \ge 0$ и $y \ge 0$ (инвестирани денари во обврзниците од тип А, односно од тип В). Тогаш, соодветниот систем ограничувачки неравенства е

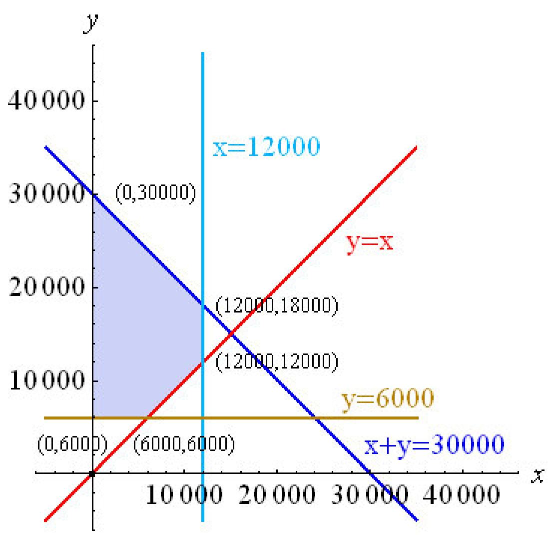
$$\begin{cases} x \le 12000 \\ y \ge 6000 \\ x + y \le 30000 \\ y \ge x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

и задачата на линеарно програмирање придружена на овој проблем е

$$\max Z := 0.08x + 0.12y$$

$$\begin{cases} x \le 12000 \\ y \ge 6000 \\ x + y \le 30000 \\ y \ge x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Графичкиот приказ на допустливата област определена со системот ограничувачки неравенства е даден на Слика 15. Од таму се согледува дека темиња на допустливата област се точките $(0,6000)$, $(6000,6000)$, $(12000,12000)$, $(12000,18000)$, $(0,30000)$.



Слика 15

Соодветните вредности на функцијата на целта во темињата на допустливата област се дадени во табелата.

Од табелата се гледа дека максимум се достигнува во точката $(0,30000)$, односно брачниот пар за да може да оствари максимална повратна заработка од 3600 денари треба да ги инвестира сите 30000 денари во обрзниците од тип В.

теме (x,y)	вредност на функцијата на целта $z = 0.08x + 0.12y$
$(0,6000)$	$z = 0.08\cdot 0 + 0.12\cdot 6000 = 720$
$(6000,6000)$	$z = 0.08\cdot 6000 + 0.12\cdot 6000 = 480 + 720 = 1200$
$(12000,12000)$	$z = 0.08\cdot 12000 + 0.12\cdot 12000 = 960 + 1440 = 2400$
$(12000,18000)$	$z = 0.08\cdot 12000 + 0.12\cdot 18000 = 960 + 2160 = 3120$
$(0,30000)$	$z = 0.08\cdot 0 + 0.12\cdot 30000 = 3600$ ⟵ max

Пример 16. Транспорт. Една фирма за продажба на автомобилски делови има еден магацин и две продавници A и B. Во магацинот се наоѓаат 1200 автомобилски гуми кои треба да се транспортираат до продавниците. Продавницата A има потреба од 400 гуми, и продавницата B има потреба од 500 гуми. Трошокот за транспорт на една гума од магацинот до продавницата A изнесува 12 ден., и трошокот за транспорт на една гума од магацинот до продавницата B изнесува 16 ден. Како треба да се организира транспортот на сите гуми од магацинот во продавнците и при тоа фирмата да оствари најниски трошоци?

Решение.

Овој проблем е пример за задачата на линеарно програмирање позната како **транспортна задача.** Основна карактеристика на овој тип на задача на линеарно програмирање е изедначување на понудата со побарувачката, односно во овој случај преносот на сите 1200 гуми од магацинот (понуда), во продавниците A и B (побарувачка). Најнапред ја составуваме соодветната табела на проблемот.

	основна побарувачка	транспорт
продавница A	400 гуми	12 ден.
продавница B	500 гуми	16 ден.
во магацинот има 1200 гуми		

Значи, треба да одредиме колку гуми треба да транспортираме во продавницата A, а колку во продавницата B, и при тоа да биде остварен минимален трошок. Па нека означиме со x - број на гуми кои треба да ги транспортираме во продавницата A, и y - број на гуми кои треба да ги транспортираме во продавницата B. Тогаш, изразот кој треба да го минимизираме (вкупниот трошок) е $Z = 12x + 16y$, затоа што за транспорт на секоја гума од магацинот до продавницата A се наплаќа по 12 ден., и за транспорт на секоја гума од магацинот до продавницата B се наплаќа по 16 ден.

Бидејќи основната побарувачка на продавницата A е 400 гуми, го имаме ограничувањето $x \geq 400$, и од тоа што основната побарувачка на продавницата B е 500 гуми, го имаме ограничувањето $y \geq 500$. И бидејќи треба да ги транспортираме сите гуми од магацинот, го добиваме ограничувањето $x + y = 1200$. Секако, да не ги изоставиме и ограничувањата за ненегативност на променливите $x \geq 0$ и $y \geq 0$ (број на гуми кои треба да се транспортираат од магацинот во продавниците A и B соодветно).

На овој начин ја добиваме следната задача на линеарно програмирање која одговара на дадениот транспортен проблем

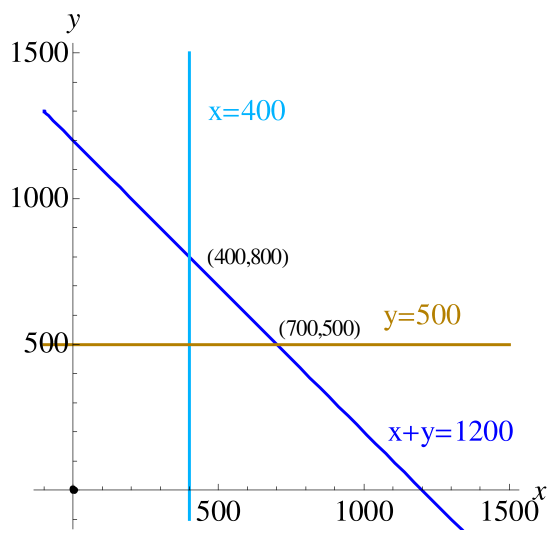
$$\min Z := 12x + 16y$$

$$\begin{cases} x \geq 400 \\ y \geq 500 \\ x + y = 1200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Графичкиот приказ на допустливата област на овој проблем е даден со Слика 16 и претставува отсечка со крајни точки $(400,800)$ и $(700,500)$, заради ограничувачкото равенство $x+y=1200$. Па, темиња на допустливата област се токму овие точки. Вредноста на функцијата на целта ово вие точки изнесува

$$z=12\cdot 400+16\cdot 800=4800+12800=17600,$$
$$z=12\cdot 700+16\cdot 500=8400+8000=16400,$$

соодветно, од каде се согледува дека минимумот се достигнува во точката $(700,500)$. Значи, за да транспотрниот трошок е минимален, треба да се транспортираат 700 гуми во продавницата А и 500 гуми во продавницата B, и при тоа транспортниот трошок ќе изнесува 16400 ден.



Слика 16

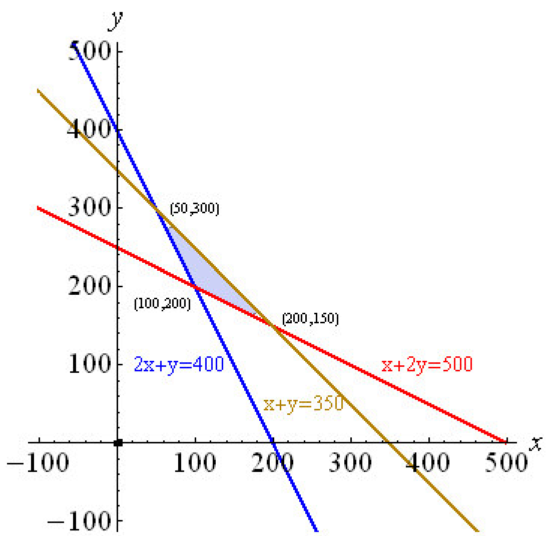
Пример 17. Прехрана. Една диета треба да содржи најмалку 400 едници витамини, 500 единици минерали и 1400 калории. Познато е дека една единица од типот на храна А содржи 2 единици витамини, 1 единица минерали и 4 калории, и една единица од типот на храна B содржи 1 единица витамини, 2 единици минерали и 4 калории. Исто така, познато е дека една единица од типот на храна А кошта 5 ден., и една единица од типот на храна B кошта 3 ден. Како треба да се состави диетата која ги задоволува минималните побарувања на витамини, минарали и калории, ако ги имаме на располагање само двата типа на прехрамбени продукти А и B, и при тоа да биде остварен минимален трошок?

Решение.

Соодветната табела на овој проблем на прехрана е следната.

	витамини	минерали	калории	цена
храна А	2	1	4	5 ден.
храна B	1	2	4	3 ден.
минимална побарувачка	400	500	1400	

Означуваме со x - единици од храната А и со y - единици од храната B кои треба да влезат во состав на диетата. Тогаш, вкупниот трошок изнесува $Z=5x+3y$ и тоа е функцијата на целта која треба да се минимизира. Ограничувањата се формираат од податоците за составот на храните А и B со витамини, минерали и калории, како и од податоците за минималната побарувачка од витамини, минерали и калории во состав на диетата. Така, бидејќи една единица од храната А содржи 2 единици витамини, и една единица од храната B содржи 1 единица витамини, тоа значи дека во состав на диетата ќе има вкупно $2x+y$ единици витамини. И бидејќи минималната побарувачка на витамини е 400 единици, го добиваме првото ограничување $2x+y\geq 400$. На сличен начин ги добиваме и другите две ограничувања кои се однесуваат на единиците минерали и на калориите соодветно, односно тоа се ограничувањата $x+2y \geq 500$ и $4x+4y \geq 1400$. Ги додаваме и ограничувањата за ненегативност на променливите $x \geq 0$ и $y \geq 0$ (единици од храните А и В соодветно во состав на диетата). Така, соодветната задача на линеарно програмирање која одговара на овој проблем е



Слика 17

$$\min Z := 5x+3y$$

$$\begin{cases} 2x+y \geq 400 \\ x+2y \geq 500 \\ 4x+4y \geq 1400 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

односно задачата

$$\min Z := 5x+3y$$

$$\begin{cases} 2x+y \geq 400 \\ x+2y \geq 500 \\ x+y \geq 350 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Графичкиот приказ на допустливата област е даден на Слика 17, од каде согледуваме дека темиња на допустливата област се точките $(100,200)$, $(200,150)$ и $(50,300)$. Вредностите на функцијата на целта во овие точки изнесува

$$z = 5\cdot 100 + 3\cdot 200 = 500 + 600 = 1100,$$
$$z = 5\cdot 200 + 3\cdot 150 = 1000 + 450 = 1450,$$
$$z = 5\cdot 50 + 3\cdot 300 = 250 + 900 = 1150,$$

соодветно. Па, заклучуваме дека најмал трошок при сосатвување на диетата која ги задоволува минималните побарувања од витамини, минерали и калории, ќе оствариме доколкуземеме 100 единици од храната А и 200 единици од храната В. Тогаш, минималниот трошок ќе изнесува 1100 ден.

Понатаму, ви предлагаме да ги решите следните реални проблеми кои се сведуваат на задача на линеарно програмирање.

Задача 6. Една фабрика произведува два производа Р1 и Р2, при што секој од нив се изработува со користење на трите машини М1, М2 и М3. Машината М1 може да се користи најмногу 70 часа, машината М2 најмногу 40 часа и машината М3 најмногу 90 часа. За производство на едно парче од производот Р1 потребни се 2 часа работа на машината М1, 1 час работа на машината М2 и 1 час работа на машината М3. За производство на едно парче од производот Р2 потребни се 1 час работа на машината М1, 1 час работа на машината М2 и 3 часа работа на машината М3. Заработката од едно парче од производот Р1 е 40 ден., додека заработката од едно парче од производот Р2 е 60 ден. Под претпоставка дека секое произведено парче од производите Р1 и Р2 ќе се продаде, како треба да се организира производството за да биде остварена максимална вкупна заработка?

Задача 7. Еден човек одлучува да инвестира 45000 ден. во акциите на две високо котирачки фирми А и В. При тоа, цената на една акција од фирмата А изнесува 14 ден., а цената на една акција од фирмата В изнесува 30 ден. Фиксната повратна заработка при инвестирањето изнесува 8% за фирмата А и 6% за фирмата В. Човекот одлучува да инвестира најмалку по 25% од 45000 ден. во акциите на секоја од фирмите А и В, но исто така тој одлучил да инвестира и најмногу по 63% од 45000 ден. во акциите на секоја од фирмите А и В. На кој начин треба човекот да го реализира инвестирањето за да оствари најголема повратна заработка? Колку изнесува повратната заработка при тој оптимален план на инвестирање?

Задача 8. Едно пакување од бебешката каша од банана кошта 90 ден. и содржи 140 калории, 31 грам јагленохидтрати и 0% од препорачаната дневна доза на витамин С. Едно пакување од бебешкиот сок од моркови кошта 80 ден. и содржи 60 калории, 13 грама јагленохидтрати и 100% од препорачаната дневна доза на витамин С. Состави ја диетата (начинот на исхрана) на детето, користејќи ги само овие два вида на прехрамбени продукти, за да биде задоволена минималната побарувачка од 160 калории, 40 грама јагленохидрати и 70% од препорачаната дневна доза на витамин С, и при тоа да се оствари најмал трошок. Дозволено е да се корисатат делови од пакувањата од прехрамбените продукти.

Литература.

[1] L. Neralić, *Uvod u matematičko programiranje 1*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2003

[2] M. Sullivan, A. Mizrahi, *Mathematics: An Applied Approach*, Eight Edition, Chicago State University, Indiana University, 2005