2. Линеарно програмирање: Геометриски пристап

Во претходниот дел беше изложен начинот за графичко претставување на систем од линеарни неравенки. Во овој дел ќе го искористиме тој начин за геометриски пристап при решавање на задача на линеарно програмирање. Но, најнапред да ја формулираме задачата на линеарно програмирање за последниот Пример 9, при дополнителни услови.

Пример 9 (продолжува). Тоа што до сега ни е познато е дека, располагаме со 1200 грама леблебија и 1920 грама суво грозје. Овие два производа треба да се измешаат во пакувања од по 16 грама, така да ниско калоричното пакување содржи 4 грама леблебија и 12 грама суво грозје, додека високо калоричното пакување содржи 8 грама леблебија и 8 грама суво грозје.
Дополнителните информации се однесуваат на заработката од продажбата на овие пакувања, имено нека заработката од продажбата на секое ниско калорично пакување е 25 ден., а заработката од продажбата на секое високо калорично пакување е 45 ден. И бидејќи со x и y ги означивме бројот на ниско, односно високо калорични пакувања, следи дека вкупната заработка Z може да се прикаже со линеарниот израз

$$Z = 25x + 45y,$$

под претпоставка дека сите пакувања се продадени. Нашата задача се состои во одредување на бројот на ниско, односно високо калорични пакувања (x и y) за кои би ја максимизирале заработката (Z).
Оваа задача е типичен пример за **задача на линеарно програмирање**. Линераниот израз (во овој случај заработката Z) кој треба да се оптимизира (во овој случај да се максимизира) се нарекува **функција на целта**, додека системот од ограничувачки линеарни неравенки (кој го формиравме во претходното излагање на Пример 9) се нарекуваат **ограничувања**. Па, задачата на линеарно програмирање која одговара на овој пример може да се преформулира како

$$\max Z := 25x + 45y$$

$$\begin{cases} x + 2y \le 300 \\ 3x + 2y \le 480 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Во општ случај една задача на линеарно програмирање се состои од два дела: линеарен израз кој треба да се минимизира или максимизира и систем од ограничувачки линеарни неравенки кои формираат **допустлива област** над која се изведува оптимизацијата.

Задача на линеарно програмирање.
Една **задача на линеарно програмирање** од две променливи x и y се состои од минимизирање или максимизирање на **функција на целта**

$$z = Ax + By$$

каде A и B се реални броеви кои не се истовремено и двата нула, при услов на **ограничувања** изразени преку систем од линеарни неравенки од x и y.

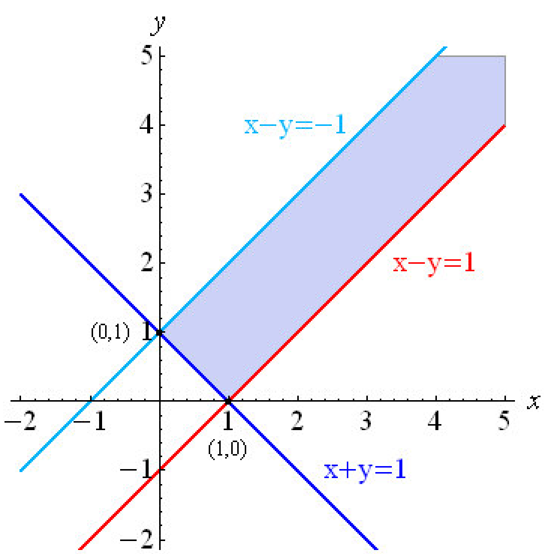
За да го минимизираме или максимизираме количеството $z = Ax + By$ треба да најдеме, ако постојат, точка или точки од допустливата област наречени **допустливи точки** во кои z ја достигнува својата најмала односно најголема вредност. Тоа значи дека **решение на задача на линеарно програмирање** е точката (x, y) која ги задоволува ограничувачките линеарни неравенства, и која го минимизира или максимизира изразот $z = Ax + By$. Ако не постои таква допуслива точка или ако не постојат допустливи точки (допустловата област е празно множество), тогаш велиме дека задачата на линеарно програмирање нема решение.

Пример 10. Да ја решиме следната задача на линеарно програмирање

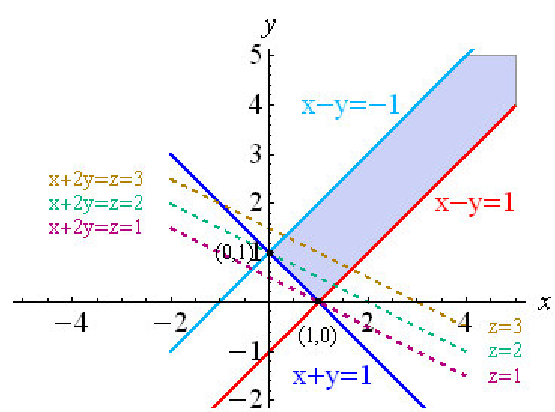
$$\min z := x + 2y$$

$$\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x - y \leq 1 \\ x - y \geq -1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Областа над која треба да оптимизираме, односно множеството допустливи точки, односно графичкиот приказ на системот ограничувачки неравенства е даден со Слика 10а.



Слика 10а



Слика 10б

Сакаме да ја најдеме најмалата вредност за z, па ја цртаме правата $z = x + 2y$ за некој избор на z, на пример за $z = 3$ (Слика 10б). Со паралелно поместување на правата $x + 2y = 3$ може да се надгледува што се случува за различни врдности на z. Бидејќи бараме минимална вредност за z, треба да ја поместиме кон долу правата $z = x + 2y$ колку е можно повеќе, но така да се уште има пресечни точки со допустливата област. Најдобро решение се достигнува кога правата која ја поместуваме допира темена точка од допустливата област (Слика 10б). Спред тоа, решение на оваа задача на линеарно пргграмирање е $x=1, y=0$, со најмала вредност на функцијата на целта $z=1$. Имено, не постојат други допустливи точки за кои z прима помала вредност.

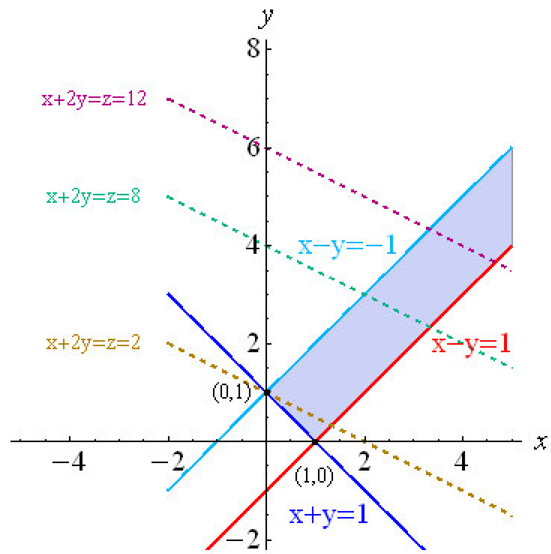
Пример 11. Доколку во Пример 10 наместо минимизирање на функцијата на целта разгледуваме максимизирање ќе ја добиеме следната задача на линеарно програмирање

$$\max z := x + 2y$$

$$\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x - y \leq 1 \\ x - y \geq -1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Расудувајќи на сличен начин, најнапред ја цртаме допустливата област, а потоа ги цртаме правите $z = x + 2y$ за различни вредности на z стремејќи се да најдеме што е можно поголема вредност за z се додека правата $z = x + 2y$ има заеднички пресечни точки со допустливата област (Слика 11).

Но, лесно се забележува дека колку и да земеме голема вредност за z секогаш ќе се најде уште поголема вредност од неа за која правата $z = x + 2y$ има заеднички пресечни точки со допустливата област. Тоа значи дека не постои најголема вредност за z, односно не постои допустлива точка која го максимизира z заклучуваме дека оваа задача на линеарно програмирање нема решение.



Слика 11

Доколку една задача на линеарно програмирање има решение тогаш за неа важи следната фундаментална теорема на линеарно програмирање. (Со проблемот за егзистенција, односно постоење на решение на една задача на линеарно програмирање нема да се справуваме тука. За негово разгледување има потреба од нкои нови поими, како ограниченост на област и слично.)

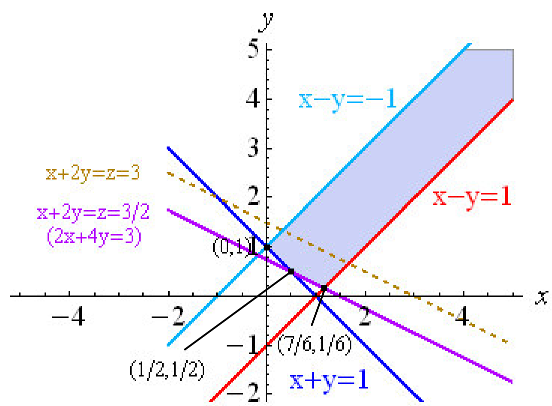
Фундаментална теорема на линеарното програмирање.
Ако задачата на линеарно програмирање има решение, тоа се наоѓа во некое теме на допустливата област, доколку задачата на линеарно програмирање има повеќе решенија, тогаш барем едно од нив е сместено во некое теме на допустливата област. Во двата случаја оптималната вредност на функцијата на целта е единствена.

Пример 12. Ако во задачата од Пример 10 додадеме уште едно ограничувачко неравенство $2x+4y\geq 3$ ја добиваме следната задача на линеарно програмирање

$$\min z := x+2y$$

$$\begin{cases} x+y\geq 1 \\ x-y\leq 1 \\ x-y\geq -1 \\ 2x+4y\geq 3 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

Нејзината допустлива област заедно со неколку избори за z се дадени на Слика 12. Согледуваме дека поместувајќи ја правата $z=x+2y$ кон долу наоѓаме дека минимумот се достигнува кога $z=\frac{3}{2}$ и во тој случај секоја точка од правата $2x+4y=3$ меѓу темињата $(\frac{7}{6},\frac{1}{6})$ и $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ вклучувајќи ги и овие темиња ја минимизира функцијата на целта. Ова е пример за задача на линеарно програмирање со бесконечно многу решенија (и единствена минимална вредност за функцијата на целта $z=\frac{3}{2}$).



Слика 12

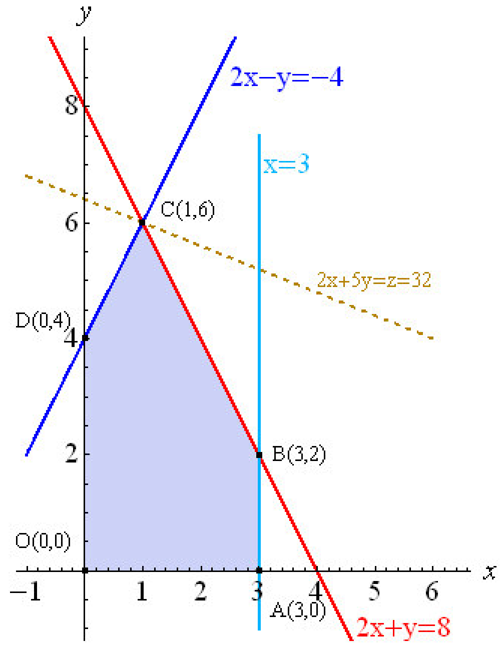
Бидејќи една задача на линеарно програмирање го достигнува својот оптимум во некое теме на допустливата област, може да ја изложиме постапката за графички пристап при решавање на задача на линеарно програмирање која има решение.

Постапка за решавање на задача на линеарно програмирање (геометриски пристап).
Ако една задача на линеарно програмирање има решение, тоа се наоѓа следејќи ги чекорите:
Чекор 1. Одреди го изразот кој одговара на количеството кое треба да се минимизира или максимизира (т.е. одреди ја функцијата на целта).
Чекор 2. Одреди ги ограничувачките неравенства и прикажи го графички системот од ограничувачки линеарни неравенки (т.е. илустрирај ја допустливата област).
Чекор 3. Најди ги темињата на допустливата област.
Чекор 4. Одреди ја вредноста на функцијата на целта во секое теме.
Чекор 5. Одбери ја минималната, односно максималната вредност на функцијата на целта, и точката во која таа се достигнува е решение на задачата на линеарно програмирање.

Пример 13. Да ја решиме следната задача на линеарно програмирање

$$\max z := 2x + 5y$$

$$\begin{cases} 2x - y \geq -4 \\ 2x + y \leq 8 \\ x \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Слика 13

Допустливата област е прикажана на Слика 13 од каде согледуваме дека таа е заградена со отсечките OA, AB, BC, CD, DO, па може слободно да се каже дека: **секоја функција на цел го достигнува својот минимум и максимум на допустлива област заградена со отсечки**. Значи, оваа задача на линеарно програмирање има решение. Следно, ги пресметуваме вредностите на функцијата на целта во секое теме од допустливата област.

теме (x, y)	вредност на функцијата на целта $z = 2x + 5y$	
$(0,0)$	$z = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$	
$(3,0)$	$z = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 6$	
$(3,2)$	$z = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 06 + 10 = 16$	
$(1,6)$	$z = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 6 = 2 + 30 = 32$ $\longleftarrow$	max
$(0,4)$	$z = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 4 = 20$	

Согледуваме дека најголема вредност z достигнува во темето $(1,6)$, што претставува решение на оваа задача на линеарно програмирање, додека најголемата вредност на функцијата на целта е $z = 32$. Навистина правата $z = 2x + 5y$ за $z = 32$ не може паралелно да се помести уште погоре, а се уште да има заеднички точки со допустливата област (Слика 13).

Пример 9 (продолжува). Последниот пат беше формирана задачата на линеарно програмирање за наоѓање на максималната заработка (Z) од продажбата на пакувањата со мешавина од леблебија и суво грозје и бројот на ниско (x) и високо (y) калорични пакувања за кои се достигнува таа максимална заработка, односно

$$\max Z := 25x + 45y$$

$$\begin{cases} x + 2y \le 300 \\ 3x + 2y \le 480 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Допустливата област на оваа задача, односно графичкиот приказ на системот ограничувачки линеарни неравенства беше дадена на Слика 9, од каде се согледува дека таа е заградена со отсечки и следствено функцијата на целта го достигнува својот максимим во некое од темињата $(0,0)$, $(160,0)$, $(90,105)$ или $(0,150)$. Слично како во Пример 13, правиме тебела за пресметување на вредностите на функцијата на целта во секое теме.

теме (x, y)	вредност на функцијата на целта $z = 25x + 45y$	
$(0,0)$	$z = 25 \cdot 0 + 45 \cdot 0 = 0$	
$(160,0)$	$z = 25 \cdot 160 + 45 \cdot 0 = 4000$	
$(90,105)$	$z = 25 \cdot 90 + 45 \cdot 105 = 2250 + 4725 = 6975$	← max
$(0,150)$	$z = 25 \cdot 0 + 45 \cdot 150 = 6750$	

Од табелата се согледува дека максималниот профит од 6975 ден. ќе се одтвари доколу се направат 90 ниско калорични пакувања и 105 високо калорични пакувања. Во тој случај се постигнува знакот на равенство во првите две ограничувачки неравенства, имено

$$x + 2y = 90 + 2 \cdot 105 = 90 + 210 = 300 \text{ и}$$
$$3x + 2y = 3 \cdot 90 + 2 \cdot 105 = 270 + 210 = 480$$

што значи дека сме ги искористиле целите расположливи количества од леблебија и суво грозје.

Задача 4. Колку ниско калорични, а колку високо калорични пакувања треба да се направат, за да се максимизира заработката (под претпоставка дека сите пакувања се продадени), ако се знае дека заработката од продажбата на секое ниско калорично пакување е 20 ден., а заработката од продажбата на секое високо калорично пакување е 50 ден.

Задача 5. Реши ги следните задачи на линеарно програмирање:

а) $$\max z := 2x + 3y \qquad \begin{cases} x + y \le 2 \\ y \le x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

б) $$\max z := 5x + 7y \qquad \begin{cases} x + y \ge 2 \\ x + y \le 8 \\ 2x + y \le 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

в) $$\min z := 3x + 6y \qquad \begin{cases} x + y \le 10 \\ 2x + y \ge 10 \\ x + 2y \ge 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

г) Најди ја најголемата вредност на изразот $z = -12x + 24y$ при ограничувања $x \le 15$, $y \le 10$, $3x + 3y \ge 9$, $-3x + 2y \le 14$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

д) Најди ги најмалата и најголемата вредност на изразот $z = 20x + 16y$ при ограничувања $4x + 3y \geq 12$, $-2x + 4y \leq 16$, $6x - y \leq 18$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Литература.

[1] G. B. Dantzig, *Linear programming and extensions*, A report prepared for US Air Force Project RAND, August 1963, Santa Monica, California, USA

[2] L. Neralić, *Uvod u matematičko programiranje 1*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2003

[3] M. Sullivan, A. Mizrahi, *Mathematics: An Applied Approach*, Eight Edition, Chicago State University, Indiana University, 2005