Ирена Стојковска

Разбирање на четирите основни средини
(1 дел)

Најчесто под зборот средина на два броја се подразбира бројот кој "се наоѓа" на средината меѓу тие два броја, односно бројот кој е еднакво "оддалечен" од двата броја. На пример, за броевите 2 и 18, тоа е бројот 10, кој е "оддалечен" за 8 и од 2 и од 18. Како е добиен овој број? Забележувајќи дека тоа е бројот со кој може да се замени секој од броевите и повторно нивниот збир да остане непроменет, може да заклучиме дека оваа средина е добиена откако ќе се соберат броевите и така добиениот збир ќе се подели со колку броеви сме собрале. Во нашиот случај имаме, $(2+18):2=20:2=10$. Вака добиената средина е позната под името **аритметичка средина**.

Не секогаш аритметичката средина е вистинскиот одговор при барање на средина на два броја, односно број со кој може да се заменат броевите за да некој резултат остане непроменет. Така на пример ако сакаме производот на два броја да остане непроменет, тогаш секој од броевите треба да го замениме со квадратниот корен од нивниот производ, односно со нивната **геометриска средина**. Пресметувајќи дека $\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{36}=6$, може да приметиме дека ако секој од броевите 2 и 18 го замениме со нивната геометриска средина 6, тогаш навистина производот ќе остане непроменет.

Овие две средини, аритметичката и геометриската, се дел од основните средини во математиката, со голема практична примена. Можеби помалку познати, но не и помалку применливи се **хармониската и квадратната средина**. Првата, хармониската средина се користи кога сакаме збирот на реципрочните вредности на броевите да остане непроменет, додека втората, квадратната средина се користи кога сакаме збирот од квадратите на броевите да остане непроменет.

За позитивните реални броеви a и b ги воведуваме следните ознаки за горе споменатите основни средини:

- $A=\frac{a+b}{2}$ за **аритметичка средина** на броевите a и b,
- $G=\sqrt{ab}$ за **геометриска средина** на броевите a и b,
- $H=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$ за **хармониска средина** на броевите a и b,
- $K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ за **квадратна средина** на броевите a и b.

Во понатамошниот текст ќе бидат покажани неравенствата кои важат за основните средини, ќе бидат изложени неколку геометриски интерпретации на истите, како и поедноставните геометриски конструкции за секоја од средините. На крајот ќе бидат обопштени дефинициите на основните средини за повеќе броеви и ќе бидат приложени неколку практични примени на средините се со цел за подобро разбирање на истите.

1. Неравенства на основните средини

За четирите основни средини A, G, H и K на броевите a и b, важат следните неравенства

$$H \le G \le A \le K .$$

Во доказите на овие неравенства се користи познатиот факст дека квадратот на било кој реален број е ненегативен. Имено, за докажување на првото неравенство тргнуваме од,

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$$
$$a-2\sqrt{ab}+b \ge 0$$
$$a+b \ge 2\sqrt{ab} \quad / \cdot \tfrac{\sqrt{ab}}{a+b}$$
$$\sqrt{ab} \ge \tfrac{2ab}{a+b}$$

т.е. $G \ge H$.

За докажување на второто неравенство, почетокот е повторно ист,

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$$
$$a-2\sqrt{ab}+b \ge 0$$
$$a+b \ge 2\sqrt{ab} \quad / : 2$$
$$\tfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

т.е. $A \ge G$.

И конечно, за докажување на третото неравенство се тргнува од,

$$(a-b)^2 \ge 0$$
$$a^2-2ab+b^2 \ge 0$$
$$a^2+b^2 \ge 2ab$$
$$2a^2+2b^2 \ge a^2+2ab+b^2 \quad / : 4$$
$$\tfrac{a^2+b^2}{2} \ge \tfrac{(a+b)^2}{4}$$
$$\sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}} \ge \tfrac{a+b}{2}$$

т.е. $K \ge A$.

Ако ги подредиме сите неравенства во една низа од неравенства се добива

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} ,$$

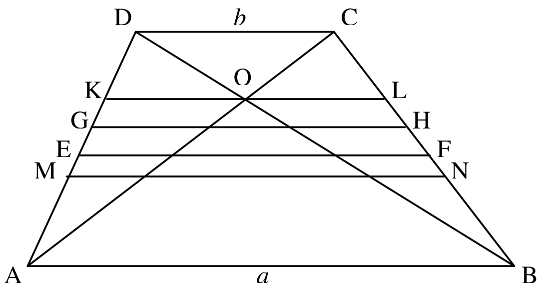
при што равенства важат при $a=b$ (проверете!).

2. Геометриски интерпретации на основните средини

Горе изложените неравенства на основните средини ќе бидат повоочливи доколку разгледаме некоја геометриска интерпретација на средините. Ви приложуваме неколку такви геометриски интерпретации.

2.1. Прва геометриска интерпретација

Нека е даден трапезот $ABCD$ со основи $\overline{AB}=a$ и $\overline{CD}=b$ (цртеж 1).



цртеж 1

1) Што претставува аритметичката средина на броевите a и b?

Ако се повикаме на знаењата за средна линија на трапез со основи a и b, веднаш може да се согледа дека должината на седната линија $\overline{EF}$, при што нели E е средина на кракот AD, а F е средина на кракот BC (цртеж 1), е еднаква на аритметичката средина на броевите a и b т.е.

$$\overline{EF} = \frac{a+b}{2}.$$

2) Да поставиме аналогно прашање како во 1) и да се обидеме да дадеме одговор на тоа прашање, односно што претставува геометриската средина на броевите a и b, каде a и b се должини на основите на трапезот $ABCD$?

Овој пат одговорот не е толку очигледен. За да дојдеме до него повлекуваме отсечка $GH \parallel AB$ ($G \in AD, H \in BC$) така да четириаголниците $ABHG$ и $GHCD$ се слични (цртеж 1). Од нивната сличност имаме

$$a : \overline{GH} = \overline{GH} : b \text{ од каде}$$
$$\overline{GH} = \sqrt{ab}.$$

Значи, должината на отсечката $\overline{GH}$ е еднаква на геометриската средина на броевите a и b.

3) Следниот факт е интересен. Ако повлечеме отсечка $KL \parallel AB$ ($K \in AD, L \in BC$) така да минува низ пресекот O на дијагоналите AC и BD на трапезот $ABCD$ (цртеж 1), ќе добиеме дека должината на отсечката $\overline{KL}$ е еднаква на хармониската средина на броевите a и b.

Имено, од сличноста на триаголниците ΔKOD и ΔABD имаме:

$$\overline{KO} : \overline{AB} = \overline{KD} : \overline{AD} = (\overline{AD} - \overline{AK}) : \overline{AD} = 1 - \overline{AK} : \overline{AD}. \qquad (1)$$

Од сличноста пак на триаголниците ΔAOK і ΔACD имаме:

$$\overline{KO} : \overline{DC} = \overline{AK} : \overline{AD}. \qquad (2)$$

Со замена на (2) во (1) се добива

$$\overline{KO} : \overline{AB} = 1 - \overline{KO} : \overline{DC}$$
$$\frac{\overline{KO}}{a} + \frac{\overline{KO}}{b} = 1$$
$$\overline{KO} = \frac{ab}{a+b}.$$

Слично се покажува дека $\overline{OL} = \frac{ab}{a+b}$, што значи дека $\overline{KL} = \frac{2ab}{a+b}$.

4) Нека сега MN е отсечка така да $MN \parallel AB$ ($M \in AD, N \in BC$) и четириаголниците $ABNM$ и $MNCD$ се еднаквоплоштни (цртеж 1). Овој пат ќе покажеме дека должината на отсечката $\overline{MN}$ е еднаква на квадратната средина на броевите a и b.

Ако со x ја означиме висината на трапезот $ABNM$, а со y висината на трапезот $MNCD$, тогаш од еднаквоста на плоштините на трапезите $ABNM$ и $MNCD$ и тоа дека нивните плоштини се половина од плоштината на трапезот $ABCD$, имаме

$$\frac{a+\overline{MN}}{2}\cdot x=\frac{\overline{MN}+b}{2}\cdot y \text{ и } \frac{a+b}{2}\cdot(x+y)=2\cdot\frac{a+\overline{MN}}{2}\cdot x,$$

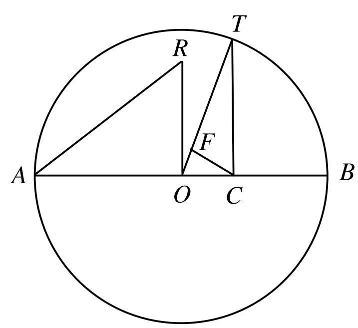
од каде се добива дека $\overline{MN}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Помош? Прво поделете ги двете равенства со x, а потоа изразете го количникот $\frac{y}{x}$ од првото равенство и заменете го во второто. На тој начин ги елиминирате x и y, па лесно ќе може да се добие на што е еднаква должината на отсечката $\overline{MN}$.

Од цртежот 1 се согледува дека $\overline{MN}\le\overline{EF}\le\overline{GH}\le\overline{KL}$, што претставува геометриски увид на покажаните неравенства на срединитe.

2.2. Втора геометриска интерпретација

Нека е дадена кружницата k со дијаметар $\overline{AB}=a+b$. Точката C од дијаметарот AB е таква да $\overline{AC}=a$ и $\overline{CB}=b$, при што без губење на општоста може да земеме дека $a\ge b$. Нека O е центарот на кружницата k. Точката R е таква да $OR\perp AB$ и при тоа $\overline{OR}=\frac{a-b}{2}$. Точката T е точка од кружницата k така да $CT\perp AB$. И точката F е точка од радиусот OT така да $CF\perp OT$. (види цртеж 2) Тогаш покажете дека,

- $\overline{OT}=\frac{a+b}{2}$ е аритметичката средина,
- $\overline{CT}=\sqrt{ab}$ е геометриската средина,
- $\overline{TF}=\frac{2ab}{a+b}$ е хармониската средина,
- $\overline{AR}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ е квадратната средина.



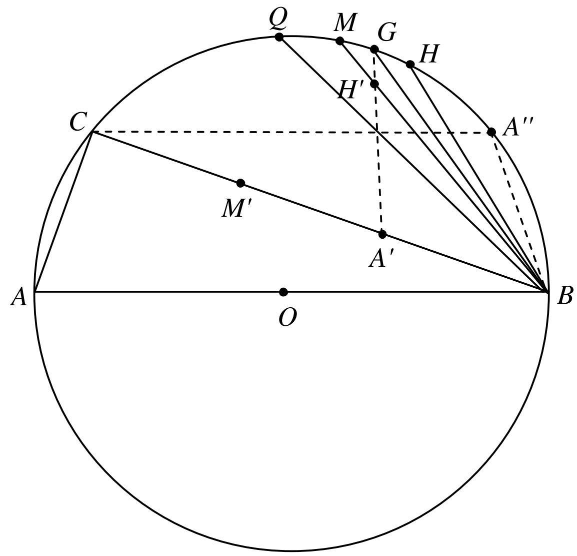
цртеж 2

Од начинот на кој се добиени точките лесно се воочува дека $\overline{TF}\le\overline{CT}\le\overline{OT}\le\overline{AR}$. Првото неравенство доаѓа од правоаголниот ΔTFC каде TF е катета, а CT е хипотенуза. Второто неравенство доаѓа од правоаголниот ΔOCT каде CT е катета, а OT е хипотенуза. И третото неравенство доаѓа од тоа што $\overline{OT}=\overline{OA}$ како радиуци на кружницата и од правоаголниот ΔAOR, каде OA е катета, а AR е хипотенуза.

2.3. Трета геометриска интерпретација

Еве уште една интересна геометриска интерпретација. Тука срединитe се тетиви од кружница со заедничка точка. Нека триаголникот ΔACB е правоаголен со прав агол кај темето C и катети $\overline{AC}=a$ и $\overline{CB}=b$, при што може да земеме дека $a\le b$. Нека O е средина на хипотензата AB и воедно центар на опишаната кружница k околу ΔACB. Точките $A'\in BC$ и $A''\in k$ се такви да $\overline{BA'}=\overline{BA''}=\overline{AC}=a$ и A и A'' се на различни страни од CB. Точката

$Q \in k$ е таква да BQ е симетрала на аголот $\measuredangle CBA"$. Точката $M' \in BC$ е средина на $A'C$, односно $\overline{A'M'} = \overline{M'C}$, додека точката $M \in k$ е таква да $\overline{BM} = \overline{BM'}$. Точката $G \in k$ е таква да $A'G \perp A"C$ и G е на лакот $\overset{\frown}{BA"C}$. Точката H' е пресечна точка на $A'G$ и BM. И точката $H \in k$ е таква да $\overline{BH'} = \overline{BH}$ и се наоѓа на лакот $\overset{\frown}{BA"C}$. (види цртеж 3) Тогаш покажете дека,



- $\overline{BM} = \frac{a+b}{2}$ е аритметичката средина,
- $\overline{BG} = \sqrt{ab}$ е геометриската средина,
- $\overline{BH} = \frac{2ab}{a+b}$ е хармониската средина,
- $\overline{BK} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ е квадратната средина.

Од цртежот 3 се согледува дека $\overline{BH} \leq \overline{BG} \leq \overline{BM} \leq \overline{BQ}$, што претставува уште еден геометриски увид на неравенствата на средините.