

Пардокси

• Неколку логички проблеми

За почеток ви предлагам да се обидете да ги решите следните логички проблеми:

Проблем 1.

Во едно село во кое има само еден бербер постои правило според кое берберот ги бричи сите оние кои не се бричат сами и не бричи никој друг. Кој го бричи берберот?

Проблем 2.

Едно илеме човекојдци фатило еден истражувач. Поглаварот на илемето му рекол на истражувачот: “Мораш да дадеш една изјава. Ако иаа биде вистинита ќе ти испечеме и ќе ти изедеме, а ако иаа биде лажна ќе ти свариме и ќе ти изедеме.” Дали може истражувачот да се спаси?

Проблем 3.

Еден иаиник се нашол на раскрсница од која излегуваат два иаа од кои само едниот води кон градој кон кој ирѓнал. Паиникот не знае кој е вистинскиот иаа по кој ирѓне. На раскрсницата седаат двајца браќа од кои едниот постојано ја зборува вистината, а другиот секогаш лаже. На иаиникот му е познато дека и двајцата на секое постојано прашање одговараат или со “да” или со “не”, но не знае кој од нив ја зборува вистината, а кој лаже. Дали може иаиникот само на еден од браќата да му постави едно единствено прашање, па од одговорот да заклучи по кој иаа ирѓне да оди?

Се очекуваат вакви размислувања:

Во *Проблемот 1.* постојат две можности, или берберот се бричи сам, или берберот не се бричи сам.

Ако берберот се бричи сам, тогаш тој спаѓа во оние жители на селото кои според правилото берберот не смее да ги бричи, што значи дека тој така би го прекршил правилото.

Ако берберот не се бричи сам, тогаш според правилото него треба да го бричи берберот, односно да се бричи сам, со што би го прекршил правилото.

Доаѓаме до заклучок дека не може да се даде одговор на прашањето кој го бричи берберот. Имено, проблемот е во тоа што даденото правило не одредува кој ќе го бричи берберот. Прифаќаме дека *решението на оваа задача е дека нема решение*, односно такво село не постои.

Во *Проблемот 2.* за да се спаси истражувачот, односно да не биде изеден, потребно е тој да ја даде изјавата “Вие ќе ме сварите.”

Тогаш човекојадците не смеат да го испечат, затоа што печењето е предвидено за вистинита изјава, а кога би го испекле изјавата “Вие ќе ме сварите.” би била лажна. Но, човекојадците не смеат ни да го сварат, бидејќи варењето е предвидено за лажна изјава, а кога би го свариле изјавата “Вие ќе ме сварите.” би била вистинита. Според тоа, ако поглаварот го одржи своето ветување, истражувачот нема да биде ниту испечен, ниту сварен.

Истражувачот се спасува кога дава *изјава која не е ниту вистинита, ниту лажна* во дадениот момент, туку нејзината вистинитост, односно невивистинитост зависи од идните настани.

Во *Проблемој* 3. патникот може да го постави прашањето “Што ќе одговори твојот брат, ако го прашам, дали левиов пат води кон градот?”

Така, ако патникот зборува со братот кој лаже, и тој му одговори со “да”, тогаш тоа не е вистина, па патникот треба да се упати по десниот пат. Ако патникот зборува со братот кој ја зборува вистината, и тој му одговори со “да”, тогаш тоа е вистина, значи патникот треба да се упати по десниот пат.

Ако патникот зборува со братот кој лаже, и тој му одговори со “не”, тогаш тоа не е вистина, па патникот треба да се упати по левиот пат. Ако патникот зборува со братот кој ја зборува вистината, и тој му одговори со “не”, тогаш тоа е вистина, значи патникот треба да се упати по левиот пат.

Значи, на поставеното прашање ако патникот добие одговор “да”, треба да тргне по десниот пат, ако добие одговор “не”, треба да тргне по левиот пат за да стигне во градот.

Патникот дознава каде се наоѓа градот ако на едниот брат му постави прашање чиј *појавен одговор го одрекнува, а одречен одговор го појавува* прашањето кое треба да го одговори неговиот брат.

Проблемите се решени, некои од добиените решенија се неочекувани, некои од изречените мисли се спротивни на општото мислење, со еден збор добиени се *парадокси* (грч. paradoxos против мислење, против очекување).

• Парадоксите - порано, сега, засекогаш

Според Вебстер, парадоксот е *тврдење кое и кога е вистинито, изгледа лажно и си противречи самојто на себе си*.

Додека пак, Лонгман вели дека, парадоксот е *тврдење кое изгледа лажно или невозможно, но содржи некаква вистина*.

А еден од најдобрите популаризатори на математиката, Мартин Гарднер, ги класифицира парадоксите во четири категории:

- тврдења кои се на изглед неистинити, но всушност се вистинити;
- тврдења кои се на изглед вистинити, но всушност се неистинити;
- низа од на изглед логички сврзани тврдења, кои водат до логичка противречност, односно погрешен заклучок;
- тврдења за кои не може да се каже дали се вистинити или неистинити.

Како и да е парадоксот и нема некоја голема потреба од дефинирање, за да се препознае. Го препознаваме во реченицата исшкртана на училишната клупа која гласи: *Не истрај то клупи!* Во реченицата напишана на туку што пристигнатиот факс, на кој нема ништо друго освен неа и гласи: *Ако не го добиете овој факс, јавете ни се по телефон*. Кога неодговорниот пријател му одговара со писмо на својот пријател во кое пишува: *Пријателе, писмото во кое ми пишуваш да ти ти враќам парите, го немам добиено*. Кога со цел да ги смири учениците кои прават неред на часот, наставникот им дава на немирните ученици ливче на кое од едната страна пишува: *Реченицата од обрнатата страна не е вистинита*, а на другата страна е напишано: *Реченицата од обрнатата страна е вистинита*, така тие долго време ќе го вртат листот, де од едната страна, де од другата, цело време во потрага по вистината.

Парадоксите ги има насекаде, во секојдневниот говор, во околината што не опкружува, во пишаните зборови, а некои од нив оставиле таков впечаток што засекогаш се запишани во историјата. Позната е Сократовата изјава: *Јас знам дека ништо не знам*. Потоа, реченицата на Бернард Шо: *Единственото златно правило е дека нема златни правила*. А големиот француски математичар и филозоф Блез Паскал во писмото пратено на својот пријател пишува: *Се*

извинувам мно̄гу, ш̄ӣо̄ њисмо̄ӣо̄ излезе њолку дол̄го, но немав доволно време да
љо скра̄ӣам ...

Парадоксите може и самите да ги формираме. Еве неколку правила за
формирање на лингвистички (говорни) парадокси кои по формирањето може и
да се модифицираат во зависност од структурата на јазикот:

Нека I , G , P се ознаки за именка, глагол, придавка соодветно, а neI ,
 neG , neP соодветно нивните антоними (спротивни значења). На пример, ако P е
слаб, тогаш neP е силен или дебел. Тогаш, парадокси се

1⁰ neI е подобар од I ; neG е подобар од G ; neP е подобар од P ;

Таа е њодобра од неа.

Да нема новос̄ӣи е добра вес̄ӣ.

2⁰ Само I е вистински neI ; Само P е вистински neP ;

Никој е навис̄ӣина “некој”.

Пријат̄ело̄ӣ е најо̄яснио̄ӣ скриен не̄пријат̄ел.

3⁰ Ова е толку P , така што изгледа neP ;

Ова е њолку њрос̄ӣо, њака ш̄ӣо̄ изгледа њешко.

Не можам да љи видам дрв̄ӣа од шум̄а̄ӣа.

4⁰ Постојат некои I кои се P и neP истовремено;

Некои нас̄ӣани се добри и лоши ис̄ӣовремено.

На̄ӣпреваро̄ӣ беше возбудлив, но досаден (затоа што губевме).

5⁰ Постојат некои I кои G и neG истовремено;

Некои деца слуша̄а̄ӣ и не слуша̄а̄ӣ (послушуваат) ис̄ӣовремено.

Полӣӣчари кои лаж̄а̄ӣ и ја зборува̄а̄ӣ вис̄ӣина̄ӣа њос̄ӣо̄јано!

6⁰ Да G , дури и кога neG ;

Да се умре од жед о̄љкружен со вода (но солена).

Таа сонува со о̄љворени очи.

7⁰ Овој I е доволен neI ;

Оваа маса за че̄љворица е доволна за шес̄ӣ луѓе.

Ми се с̄темни сред бел ден (кога ја слушнав веста).

8⁰ neG понекогаш значи G ;

Молче̄е̄ӣо̄ њонекогаш кажува мно̄гу.

Војна за да се обезбеди мир.

9⁰ I без I ;

Живо̄ӣ без живеење. (се плаши од смртта, па не сака да живее)

Правило̄ӣо̄ гласи: нема љравила!

10⁰ neI во I ;

Осаменос̄ӣ во њол̄ӣа.

Сиромаш̄ӣӣја во бога̄ӣс̄љво. (ако нема љубов во богата фамилија)

11⁰ I на neI ;

Сенка̄ӣа на све̄љлина̄ӣа.

Музика̄ӣа на њӣӣина̄ӣа.

12⁰ G тоа што никој neG ;

Го гледа њоа ш̄ӣо̄ никој не може да љо види.

Го кажува њоа ш̄ӣо̄ никој не може да љо каже. (открива тајна)

13⁰ neP е P ;

Лошо̄ӣо̄ е добро (затоа што приморува да се обидеш повторно).

Да не згре̄ӣӣӣ никогаш е грешка.

14⁰ neI I ;

Тажна среќа.

Гласен ше̄љо̄ӣ.

15⁰ Да G тоа што neG ;

Ти си њоа ш̄ӣо̄ не си.

Да се умре може да значи да се живее вечно. (за научник)

• Математиката и парадоксите

Најголемите три кризи во математиката се поврзани со решавање на парадокси. И токму нивното разрешување довело до појавување на нови и важни теории.

Околу VI век п.н.е настанала првата криза, со откривањето дека страната на квадратот и неговата дијагонала се неизразливи меѓусебно со помош на тогашните броеви. Тоа довело до појава на *иррационалните броеви* (ако a е страната на квадратот, тогаш неговата дијагонала d изразена преку страната е $d = a\sqrt{2}$).

Втората криза е поврзана со појавувањето на *бескрајно мали* големина. Имено, математичарите од XVII и XVIII век се судриле со проблемот како е можно да постојат големина кои се земаат дека се нула, а тие цело време се различни од нула (бројот $\frac{1}{n}$, каде n е многу голем природен број, се зема приближно дека е еднаков на нула, но за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот $\frac{1}{n} \neq 0$). Овој парадокс бил разрешен од Коши со создавањето на *теоријата на граници*.

Засега последна, третата криза во математиката (XIX и XX век) била толку силна што довела до појавување на цела една теорија - *теоријата на множества* создадена од Георг Кантор. Кризата настанала при обид да се реши Раселовиот парадокс на берберот (*Проблемот 1*). Ако го означиме со M множеството од сите села во кои има само еден бербер и кој брочи според наведеното правило, тогаш решението на овој "парадокс" ќе биде $M = \emptyset$.

Значи, како што подоцна изјавил Расел, *благодарение на стремежта да се разрешат парадоксите математиката станала логична, а логиката нематематичка. Парадоксите не го разрушиле авторитетот на математиката како непогрешлива наука, туку напротив, довеле до нејзино збогатување со нови поими и теории ...*

Но, не се што изгледа како парадокс во математиката е навистина парадокс и ќе доведе до појавување на некоја нова теорија, тоа најчесто е резултат на недоволно математичко знаење, расеаност или едноставно - забава.

Едно момче туку што научило да работи со калкулатор вели: $\frac{1}{2}$ е мал број (калкулаторот покажува 0.5), $\frac{1}{4}$ е иста така мал број (калкулаторот покажува 0.25), а гледајте којку голем број е $\frac{1}{3}$ (калкулаторот покажува 0.33333333).

Додека пак, еден истакнат професор по математика ја прави следната класификација: *Има три вида на математичари - тие кои знаат да бројат и тие кои не знаат да бројат.*

А познатата изрека на Епименид, поет од VI век п.н.е, кој бил жител на островот Крит и кој кажал: *Сите критјани лажат*, долго време се сметала за парадокс, затоа што се размислувало вака:

"Ако Епименид ја зборува вистината, тогаш тој треба ја лаже затоа што е критјанин, па заклучуваме дека Епименид лаже. Ако пак Епименид лаже, тогаш сите критјани ја зборуваат вистината, односно и тој ја зборува вистината. Излегува дека изјавата на Епименид не е ниту вистинито, ниту лажно."

Меѓутоа грешката се правела кога е правена негација на Епименидовата изјава. Имено, логичката негација на *Сите критјани лажат* не е *Сите критјани ја зборуваат вистината*, туку *Постојат критјани кои ја зборуваат вистината*. Така, парадокс нема, а изјавата на Епименид е лажна, тој лаже, но има критјани кои ја зборуваат вистината.

На часот по математика за алгебарски изрази, за да провери наставникот дали учениците ги усвоиле новите знаења, вели: *Ученици, сега ќе ви докажам дека $1=2$. Нека x и y се ненултни броеви, така што*

$$x = y.$$

Со множење на последното равенство со y се добива

$$xy = y^2.$$

Одземаме x^2 од двете страни

$$xy - x^2 = y^2 - x^2, \text{ односно}$$

$$x(y - x) = (y - x)(y + x).$$

Го делиме последното равенство со $y - x$ и добиваме

$$x = y + x.$$

Како $x = y$, тогаш

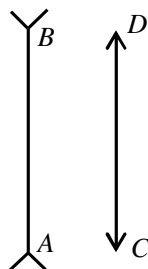
$$x = 2x.$$

По делењето на последното равенство со x се добива

$$1 = 2.$$

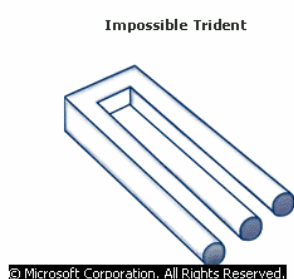
По изложениот доказ некои од учениците се изненадиле и си помислиле дека бадијала учат математика, кога еднаш $1 \neq 2$, а друг пат $1 = 2$. Но, подобро би било да седнат и да научат дека секогаш кога ќе делат некое равенство да проверуваат дали при условите на задачата изразот со кој се дели е нула, како што за $x = y$ имаме дека $y - x = 0$, па не смее да се дели со $y - x$.

На друг час по математика, наставникот прашува еден ученик: Која од отсечките AB и CD (на црт. 1) е подолга? Ученикот без размислување одговара: *Очигледно е дека отсечката AB е подолга од CD . Што мислите вие?*



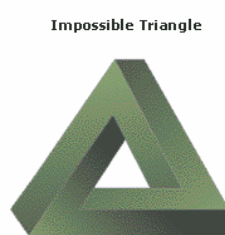
црт. 1

Што мислите и за сликите на црт. 2 и црт. 3? Дали нивното постоење е парадокс или може да најдете некое рационално објаснување?



© Microsoft Corporation. All Rights Reserved.

црт. 2



црт. 3

• Логички проблеми за крај

Се надевам дека успеав парадоксите да ви ги прикажам и како интересни и како многу важни за математиката. А токму тука, во математиката нив ги има најмногу во логичките проблеми. Затоа, ви приложувам уште еден дел логички проблеми:

Проблем 4.

На еден затвореник му кажале дека ќе биде обесен некој ден помеѓу понеделник и петок, но тој нема да знае кој ден ќе биде бесењето пред тоа да се случи. Кој ден е обесен затвореникот?

Затвореникот размислувал вака: “Нема да бидам обесен во петок затоа што ако е така во четврток ќе бидам се уште жив и ќе знам дека во петок ќе ме обесат, а не треба да знам однапред. Нема да ме обесат во четврток од исти причини, а со истото размислување не е тешко да се заклучи дека нема да ме обесат во ниеден друг ден.” Така, затвореникот заклучил дека нема да биде обесен. Но, бесењето се случило некој ден освен петок, изненадувајќи го затвореникот.

Проблем 5.

Две момчиња и се додворуваат на иста девојка. Таа им вели: “Најмиштал ми е една песна. Ќе ја одберам онаа која повеќе ќе ми се допадне. Ако погодам кој од вас двајцата ја напишал, ќе се омажам за него. Ако не погодам, ќе се омажам за тој што ја напишал другата песна.” Дали е фер овој предлог, односно дали и двете момчиња имаат подеднакви шанси да се омажат за девојката?

Предлогот на девојката не е фер, бидејќи иако изгледа дека момчињата имаат подеднакви шанси, сепак таа ќе се омажи за она момче за кое што сака. Имено, при погодувањето на тој што ја напишал подобрата песна треба само да го именува момчето што го сака. Ако, погоди дека песната е негова, јасно е дека ќе се омажи за него. Ако не погоди дека подобрата песна е негова, ќе се омажи за она момче што ја напишало полошата песна, односно повторно за момчето што го сака.

Проблем 6.

Судијата на еден обвинет, кој не сакал да го ослободи, му понудил еден фер предлог. На едно ливче напишал “живот”, а на друго “смрт”. Обвинетиот со врзани очи избира едно ливче и ако на него пишува “живот”, тој ќе биде ослободен, а во сиротиен случај ќе биде осуден на смртна казна. Меѓутоа обвинетиот пред да избира ливче дознал дека судијата и на двете ливчиња напишал “смрт”. Дали може обвинетиот да се спаси?

Парадоксот е во тоа што обвинетиот може да се спаси од оваа сигурна смрт. Доволно е избраното ливче да го проголта, тоа значи на ливчето што останало пишува “смрт”, па според предлогот што го дал, судијата ќе мора да признае дека на извлеченото ливче пишувало “живот” и така ќе мора да го ослободи затвореникот.

На следните логички проблеми ви предлагам самите да најдете решенија:

Проблем 7.

Двајца близнаци се разликуваат само во тоа што едниот секогаш лаже, а другиот секогаш ја зборува вистината. На секое поставено прашање тие одговараат со “да” или со “не”. Дали може да им се постави на двајца близнаци прашање на кое и двајцата ќе дадат исти одговор?

Проблем 8.

Еден исцржувач се нашол во една земја во која живееле две племења. Членовите на едниото племе секогаш лажат, додека членовите на другото секогаш ја зборуваат вистината. Исцржувачот среќнал двајца домородци и го прашал повисокиот од нив: “Дали ја зборуваат само вистината?” Тој одговорил: “Тарабара”. Тогаш, поносниот домородец му објаснил на исцржувачот: “Тој рече вдаг, меѓутоа тиј секогаш лаже.” На кого исцржувачот може да му верува?

Проблем 9.

Според една стара легенда, околу пркалезната маса седеле 13 витези на чело со кралот Артур, при што секој се заколнал дека или секогаш ќе ја зборува вистината или секогаш ќе лаже. Присигнал еден странец и секој витез го запрашал што мисли за својот сосед од десно. Сите одговориле дека нивниот сосед е лажго, само кралскиот советник Мерлин кој седел лево од кралот Артур одговорил дека кралот секогаш ја зборува вистината. На прашањето на странецот, дали околу масата се повеќе оние кои лажат или оние кои ја зборуваат вистината, кралот одговорил дека оние кои ја зборуваат вистината се повеќе, а неговиот советник Мерлин прецизирал дека оние кои ја зборуваат вистината се за тројца повеќе. Колку витези никогаш не лажат и дали меѓу нив се кралот Артур и неговиот советник Мерлин?

Литература:

1. Тренчевски К.; Малчески Р.; Димовски Д.: *Занимлива математика*, МММ, Скопје, 1994
2. Stojanović V.: *Matematiskop 3*, Nauka, Beograd, 1988
3. Сендова Е.: *Математика+логика*, Математика плус ООД, Софија, 1998/2 (23-27)
4. Девиде В.: *Увод во математичката логика*, Математички институт со нумерички центар при Универзитетот Кирил и Методиј, Скопје, 1973